MATEMÁTICAS

ÁREA: BÁSICA CLAVE DE LA ASIGNATURA: LA 102

OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA:

Al término del curso, el alumno analizará los principios de las matemáticas; aplicará los mismos como herramientas para operar en los comportamientos estadísticos, económicos y en particular los administrativos, dentro de las organizaciones.

3. Matrices

El concepto de matriz alcanza múltiples aplicaciones tanto en la representación y manipulación de datos como en el cálculo numérico y simbólico, que se deriva de los modelos matemáticos utilizados para resolver problemas en diferentes disciplinas como, por ejemplo, las ciencias sociales, las ingenierías, economía, física, estadística y las diferentes ramas de las matemáticas entre las que destacamos las ecuaciones diferenciales, el cálculo numérico y, por supuesto, el álgebra. (Steegmann et al)

Los objetivos del tema son:

- Conocer algunos tipos de matrices.
- Conocer las principales operaciones con matrices.

3.3 Matriz inversa

En el álgebra matricial, la división no está definida. La inversión de matrices es la contraparte de la división en álgebra.

La **inversa de una matriz** está definida como aquella matriz, que multiplicada por la original da por resultado la matriz identidad, se denota como A^{-1}: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$

Ejemplo:

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es invertible y su inversa es,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{31} & -\frac{4}{31} & \frac{7}{31} \\ \frac{13}{31} & -\frac{7}{31} & -\frac{11}{31} \\ -\frac{9}{31} & \frac{12}{31} & \frac{10}{31} \end{pmatrix}$$

ya que;

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{31} & -\frac{4}{31} & \frac{7}{31} \\ \frac{13}{31} & -\frac{7}{31} & -\frac{11}{31} \\ -\frac{9}{31} & \frac{12}{31} & \frac{10}{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I.$$

Método para calcular la inversa de una matriz

Obtener la matriz inversa de:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Se agrega una matriz unitaria del mismo orden que la matriz A:

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. Mediante operaciones elementales se convierte la matriz original en una matriz unidad

• dividiendo entre 3 el primer renglón:

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

• multiplicando por 5 el primer renglón y sumando al segundo:

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right]$$

- dividiendo entre 2/3 el segundo renglón:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

- multiplicando por 2/3 el segundo renglón y sumando al primero:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

- Por lo tanto;

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Para comprobar si los cálculos son correctos debemos realizar la comprobación:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & 3-3 \\ -10+10 & -5+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

3.4 Método de Gauss-Jordan

Muchos problemas de la vida obligan a resolver simultáneamente varias ecuaciones lineales para hallar las soluciones comunes a ellas.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales que se puede escribir de la forma tradicional.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \cdots \quad \cdots \quad \ldots \\ a_{m1}x_n + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnita, el método de **eliminación de Gauss** consiste en obtener un sistema equivalente cuya primera ecuación tenga n incógnitas, la segunda n-1, la tercera n-2, y así sucesivamente hasta llegar a la última ecuación que tendrá sólo una incógnita. Hecho esto, se resuelve la última ecuación, después la penúltima, y así hasta llegar a la primera.

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots \qquad \ldots \quad \\ a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Lo anterior significa que se debe eliminar x_1 en la segunda ecuación, x_1 y x_2 en la tercera, x_1, x_2, y x_3 en la cuarta, etc. Finalmente en la última se deben eliminar de x_1 a x_{n-1}. Una vez que se modificaron las ecuaciones, la solución es completada por sustitución desde la última hacia las anteriores ecuaciones.

El **método de Gauss-Jordan** es una variante del método de Gauss. Cuando se elimina una incógnita en una ecuación, Gauss-Jordan elimina esa incógnita en el resto de las ecuaciones, tomando como base para la eliminación a la ecuación pivote. También todos los renglones se normalizan cuando se toman como ecuación pivote. El resultado final de este tipo de eliminación genera una matriz identidad en vez de una triangular como lo hace Gauss, por lo que no se usa la sustitución hacia atrás.

Debemos llevar a dicha matriz a su forma escalonada reducida mediante operaciones elementales en los renglones de la matriz, para ésto, escribiremos la matriz y a continuación una flecha. Encima de esta flecha indicaremos la(s) operación(es) que estamos efectuando para que el lector pueda seguir el desarrollo.

Notación para las operaciones elementales en renglones

1. cRi nuevo renglón i de la matriz aumentada.
2. Ri ↔ R j intercambio del renglón i con el renglón j.
3. aRi + R j nuevo renglón j de la matriz aumentada.

Ejemplos:

Sistema con única solución

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones con Gauss-Jordan:

$$2x + 3y + z = 1$$
$$3x - 2y - 4z = -3$$
$$5x - y - z = 4$$

a) El sistema se expresa como una matriz aumentada.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Desarrollo para obtener la forma escalonada reducida.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-5R_1+R_3]{-3R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{17}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2R_3]{-\frac{2}{13}R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{9}{13} \\ 0 & -17 & -7 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{17R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{9}{13} \\ 0 & 0 & \frac{96}{13} & \frac{192}{13} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{13}{96}R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{9}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}R_3+R_1]{-\frac{11}{13}R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{2}R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{matrix}$$

c) Interpretación del resultado. La última matriz escalonada reducida indica que: La solución del sistema es x=1, y=−1, z=2.

Sistema con infinidad soluciones

Obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$3x-2y+3z=5$$
$$2x+4y-z=2$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 16 & -9 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{16}R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{6R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

La última matriz está en su forma escalonada reducida, ya no se puede reducir más, de donde obtenemos:

$$x+\frac{5}{8}z=\frac{3}{2}$$
$$y-\frac{9}{16}z=-\frac{1}{4}$$

Despejando

$$x=\frac{3}{2}-\frac{5}{8}z$$
$$y=-\frac{1}{4}+\frac{9}{16}z$$

Luego x, y dependen de z, si z=t donde t es un número real tenemos:

$$x=\frac{3}{2}-\frac{5}{8}t$$
$$y=-\frac{1}{4}+\frac{9}{16}t \;;\quad t\in\mathbb{R}.$$
$$z=t$$

Es decir, el sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones ya que para cada valor de t habrá un valor para x, y, z.

Porejemplo,si t=0 entonces x=3/2, y=−1/4, z=0, es una solución para el sistema de ecuaciones.

Si t =1 entonces x = 7 , y = 5 , z =1, es otra solución para el sistema de ecuaciones.

Sistema sin solución

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$
\begin{aligned}
x + 8y - 5z &= 3\\
3x - 2y + 3z &= 1\\
2x + 3y - z &= 4
\end{aligned}
$$

Solución

$$
\begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}
\xrightarrow[-2R_1+R_3]{-3R_1+R_2}
\begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & -26 & 18 & -8 \\ 0 & -13 & 9 & -2 \end{pmatrix}
\xrightarrow{-2R_3+R_2}
\begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -13 & 9 & -2 \end{pmatrix}
$$

No hay necesidad de seguir reduciendo, del segundo renglón se tiene 0x + 0y + 0z = −4 que da la igualdad 0 = −4 (¡contradicción!), por lo tanto, el sistema no tiene solución.

Referencias

Becerril, J. Et al.SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES MEDIANTE EL METODO DE GAUSS – JORDAN. UAM Azcapotzalco, México.

Steegmann C. & et al. Álgebra de matrices. Recuperado de http://www.uoc.edu/in3/emath/docs/Algebra_Matrices.pdf